

Formalizacija žirovektorskih prostora kao modela hiperboličke geometrije i specijalne teorije relativiteta

kandidat: Jelena Marković

rezime:

Žirovektorski prostori predstavljaju algebarske strukture koje opisuju hiperboličku geometriju na isti način na koji vektorski prostori opisuju Euklidsku geometriju. Iako same operacije žirovektorskih prostora nisu ni komutativne ni asocijativne, uvođenje pojmova žirokomutativnosti i žiroasocijativnosti obezbeđuje stabilan okvir unutar koga se fundamentalne teoreme mogu formulisati u obliku koji je sintaksno i strukturno veoma blizak euklidskim analogonima. Ova paralela ne samo da olakšava razumevanje hiperboličkih konstrukcija, već otvara i mogućnosti za primenu klasičnih algebarskih metoda u novom, hiperboličkom kontekstu.

Ajnštajnovu sabiranje brzina nije komutativno ni asocijativno kao sabiranje brzina u klasičnoj mehanici. Međutim, jeste žirokomutativno i žiroasocijativno (na način na koji su ova svojstva i opisana, dodavanjem specifičnog korekcionog faktora koji u ovom slučaju nije apstraktni pojam, već izraz koji modeluje relativističke efekte – tzv. Tomasovu precesiju) i dovodi do izgradnje Ajnštajnovog žirovektorskog prostora, koji, kako je formalno pokazano u ovoj disertaciji, zadovoljava aksiome Tarskog i negaciju aksiome paralelnosti, tj. modeluje hiperboličku geometriju.

Predmet ove disertacije je formalna verifikacija svojstava žirovektorskih prostora i njihove generalizacije normiranih žirolinearnih prostora u dokazivaču teorema Isabelle/HOL. Kroz formalnu verifikaciju dolazi se često do otkrivanja previda u dokazima pisanim rukom – bilo da su oni neispravna tvrđenja ili tvrđenja koja se moraju dopuniti određenim pretpostavkama da bi bila ispravna – ali i do otkrivanja novih teorema. Sa razvojem interaktivnih dokazivača teorema (Isabelle/HOL, Lean, Coq, itd.) formalizacija postaje sve važnija u matematici i njen cilj je da se gradi “digitalna biblioteka” matematike, gde je svaka lema i teorema proverena do najsitnijeg detalja. Za mlade oblasti kao što je “žiromatematika”, formalizacija donosi poverenje da će se budući radovi nadovezivati na čvrst temelj, bez bojazni da se oslanjaju na neproverene algebarske manipulacije.

Posebna pažnja u disertaciji posvećena je formalizaciji dva centralna planarna žirovektorska prostora: Mebijusovog, inspirisanog hiperboličkom geometrijom, i Ajnštajnovog, zasnovanog na specijalnoj teoriji relativiteta. Njihova izomorfnost je ne samo matematički dokazana već i potpuno formalno verifikovana u Isabelle/HOL, što predstavlja značajan doprinos jer su ti dokazi u literaturi bili izostavljeni zbog složene algebarske prirode. Dodatno, dopunjena je i u potpunosti formalizovana teorema o žiroizomorfizmu, kojom se potvrđuje da je svaka struktura izomorfna žirovektorskom prostoru takođe žirovektorski prostor, čime je ova oblast dobila potpuniju i pouzdaniju teorijsku osnovu, ali i efikasniji način utvrđivanja da li neka struktura zadovoljava aksiome žirovektorskog prostora.

Dalje, formalno je dokazano da je Mebijusov žirovektorski prostor ekvivalentan Poincareovom disk modelu, a u ranijim radovima je pokazano da je Poincareov disk model model hiperboličke geometrije, što znači da je i Mebijusov žirovektorski prostor model hiperboličke geometrije. Time je razvijen novi formalni model Poincareovog diska unutar Isabelle/HOL, koji je sintaksno znatno jednostavniji od klasičnih pristupa zasnovanih na projektivnoj geometriji, pa samim tim pogodniji

za buduću upotrebu u verifikaciji složenijih geometrijskih teorija. Konačno, u ovom okviru formalno su rekonstruisane i verifikovane žirovektorske verzije poznatih geometrijskih rezultata, poput Pitagorine i kosinusne teoreme, čime je demonstrirana primenljivost razvijenog formalizma.

Svi iznad pomenuti rezultati su publikovani. Od nepublikovanih rezultata značajno je pomenuti da je u Isabelle/HOL postavljena dobra osnova za formalnu verifikaciju dokaza Mazur-Ulamove teoreme u slučaju normiranih žirolinearnih prostora i da je u jednom od dokaza same teoreme otkriven prekid – deo koji potencijalno nije ispravan ili nije ispravan bez dodatnih uslova. Drugi potencijalni pravci rada su uopštenje na 3D slučaj i formalizacija teorema koje govore o vezi žirovektorskih i normiranih žirolinearnih prostora, kao i formalni dokaz njihovih mnogih topoloških i metričkih svojstava.